Procura heurística
Cap 3 (3.5 e 3.6)

Parcialmente adaptado de

http://aima.eecs.berkeley.edu

Resumo

- Procura pelo melhor primeiro
- Procura sôfrega
- Procura A^*
- Heurísticas e suas propriedades
- Procura informada com memória limitada

Implementação: procura genérica em árvores

function TREE-SEARCH(*problem, frontier*) **returns** a solution, or failure
node ← node with STATE = *problem*.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
frontier ← INSERT(*node*, *frontier*)
loop do
if EMPTY?(*frontier*) **return** failure
node ← POP(frontier)
if *problem.*GOAL-TEST(*node*.STATE) **then** return SOLUTION(*node*)
frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(*node*,*problem*),*frontier*)

function EXPAND(*node*, *problem*) **returns** a set of nodes
successors ← the empty set
for each *action* **in** *problem***.**ACTIONS (*node*.STATE) **do**
s ← CHILD-NODE(*problem*,*node*,*action*)
add *s* to *successors*
return *successors*

function CHILD-NODE(*problem*, *par*, *action*) **returns** a node
return a node with
STATE = *problem*.RESULT(*par*.STATE,*action*),
PARENT = *par*, ACTION = *action* , DEPTH ← *parent*.DEPTH+1
PATH-COST = *par*.PATH-COST + *problem*.STEP-COST(*par*.STATE, *action*)

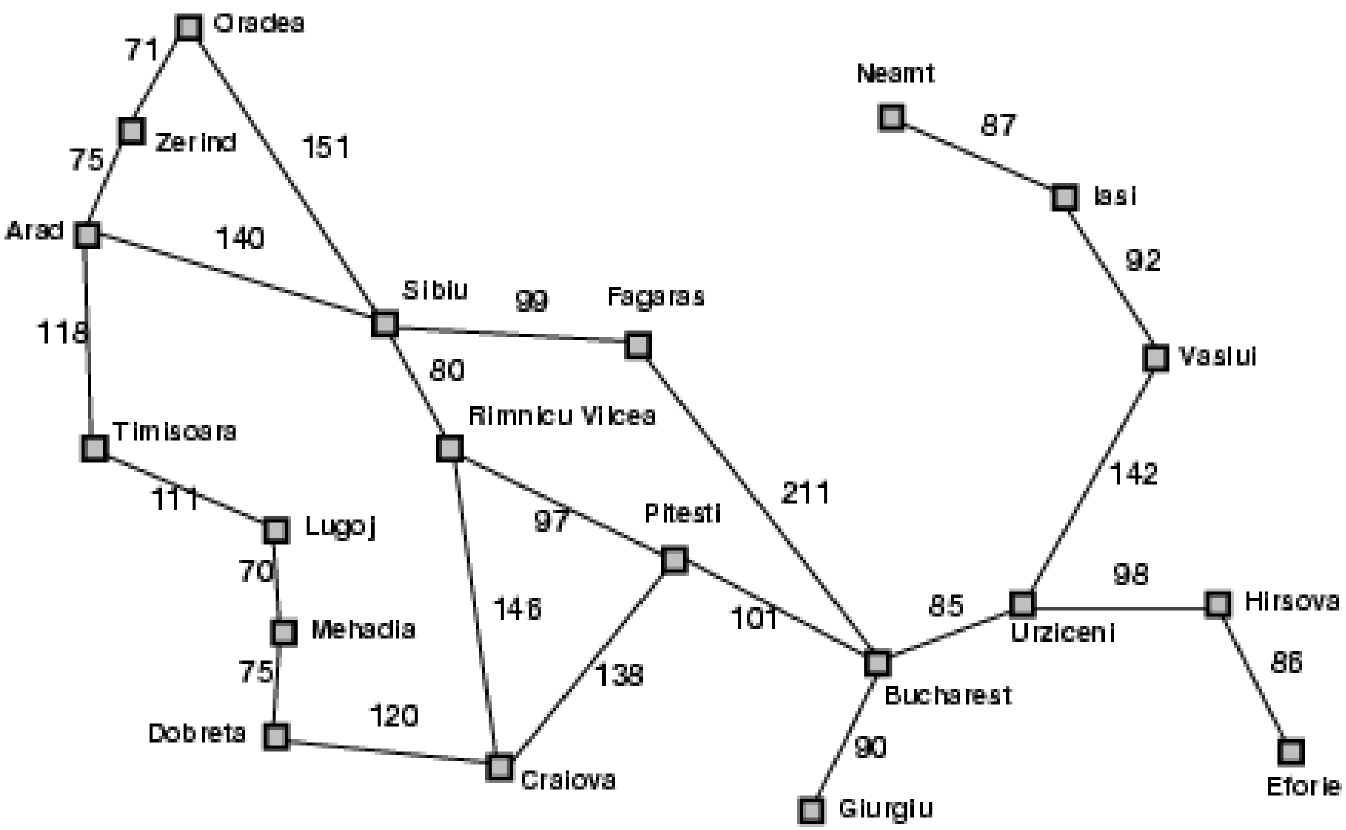
Procura pelo melhor primeiro

- Ideia: aplicar uma função de avaliação *f(n)* a cada nó
  - Indica-nos se o nó é promissor ou não
  - → expandir o nó que aparenta ser mais promissor
  - →
- Implementação:

  Ordenar os nós na fronteira por ordem crescente (minimizar) ou decrescente (maximizar) da função de avaliação

- Casos especiais:
  - Procura sôfrega
  - Procura A*
  -

Roménia com distâncias em linha recta km



Straight–line distance
to Bucharest

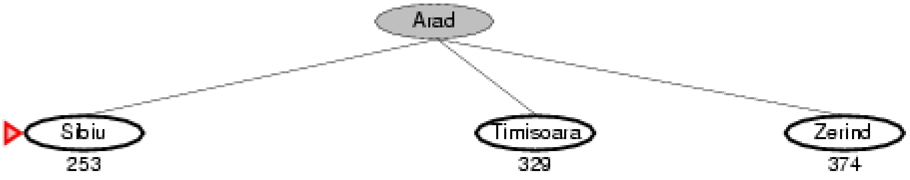
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	176
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	100
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Procura sôfrega

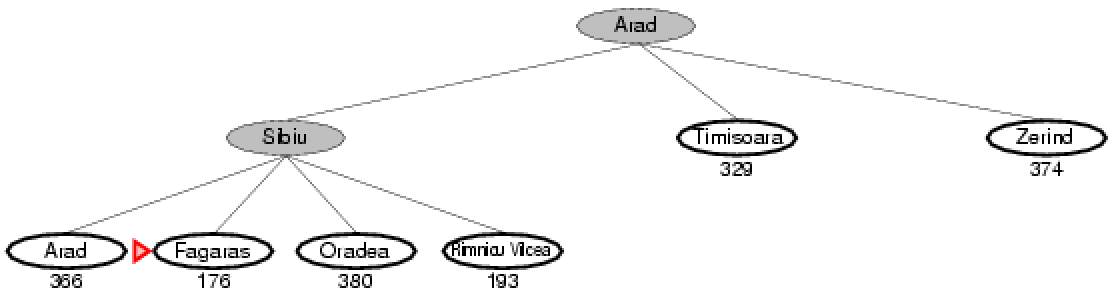
- Função de avaliação $f(n) = h(n)$ (heurística)
- = estimativa do custo do menor caminho para ir de n até a um estado objectivo
-
  - $h_{SLD}(n)$ = distância em linha recta de n até Bucareste
  -
- Procura sôfrega expande o nó que *aparenta* estar mais próximo do objectivo

Exemplo de procura sôfrega

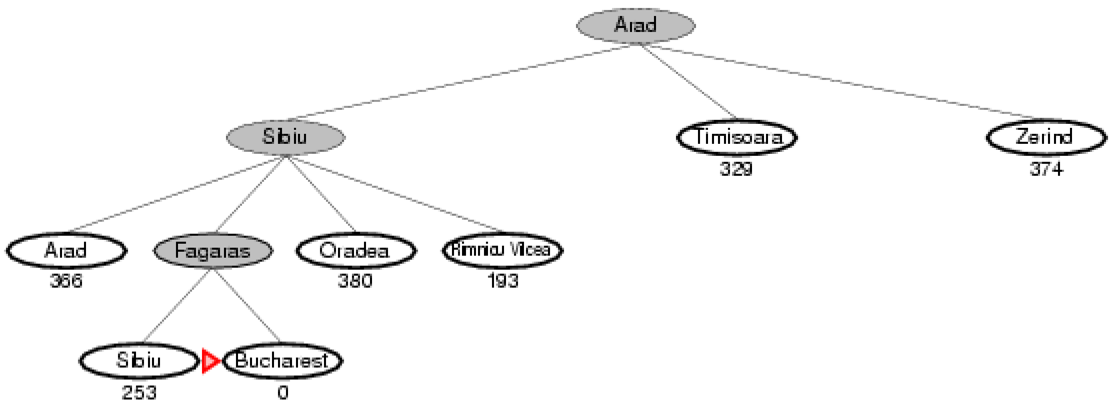
Exemplo de procura sôfrega



Exemplo de procura sôfrega



Exemplo de procura sôfrega



Propriedades da procura sôfrega

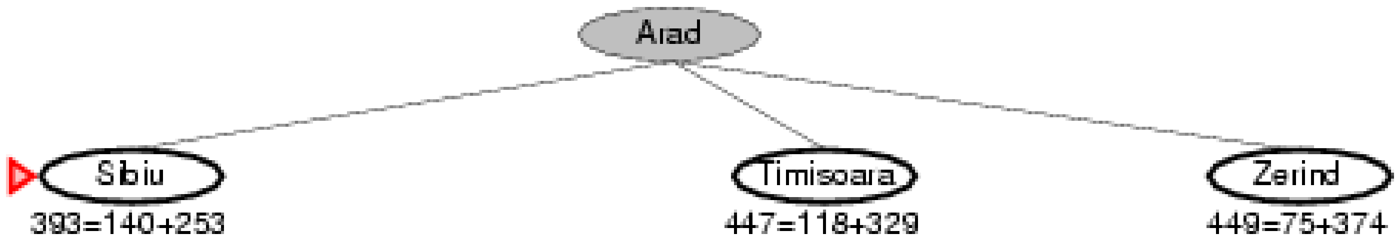
- Completa? Não – pode ficar presa em ciclos, e.g., com Oradea como objectivo Iasi → Neamt → Iasi → Neamt
  Completa em espaços finitos com verificação de estados repetidos
- Tempo? $O(b^m)$, mas uma boa heurística pode ter melhorias espectaculares
- Espaço? $O(b^m)$ – mantém todos os nós em memória
- Óptima? Não
-

Procura A^*

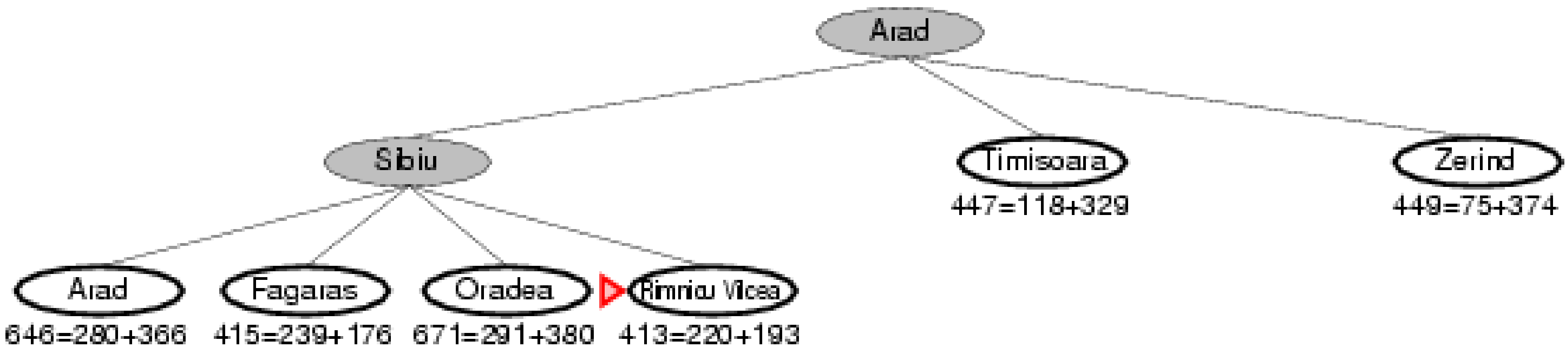
- Ideia: evitar expandir caminhos que já têm elevado custo
- Função de avaliação $f(n) = g(n) + h(n)$
  - $g(n)$ = custo actual para atingir n
  - $h(n)$ = custo estimado para atingir o objectivo a partir de n
  - $f(n)$ = custo total estimado do caminho até ao objectivo passando por n

Exemplo de Procura A*

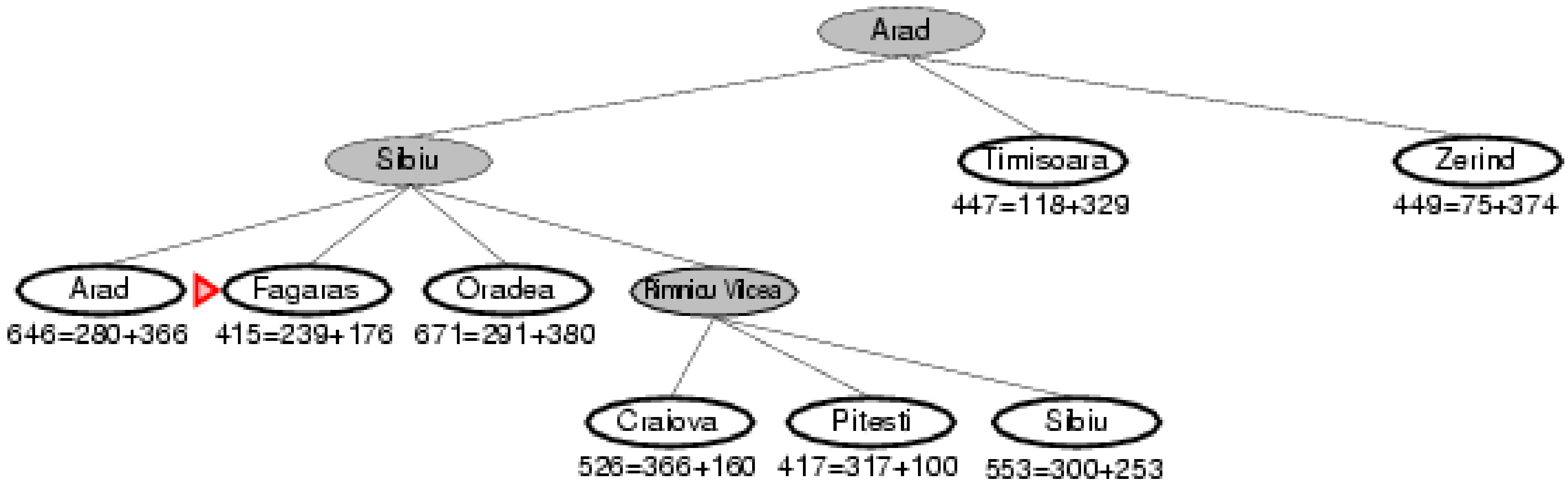
Exemplo de Procura A*



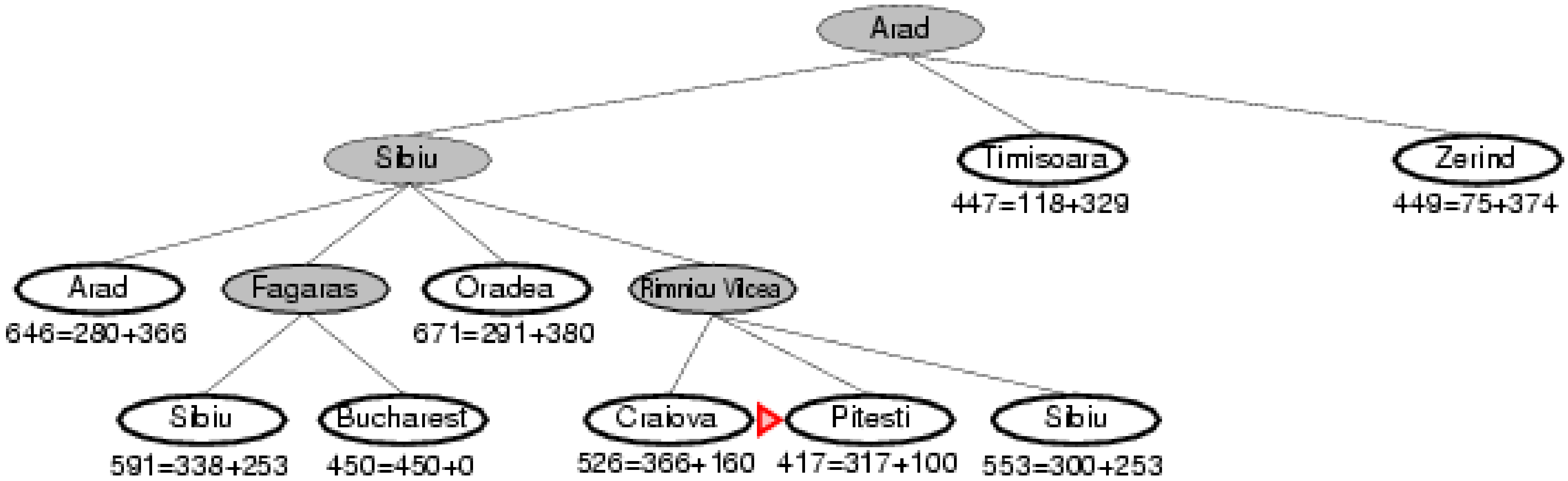
Exemplo de Procura A*



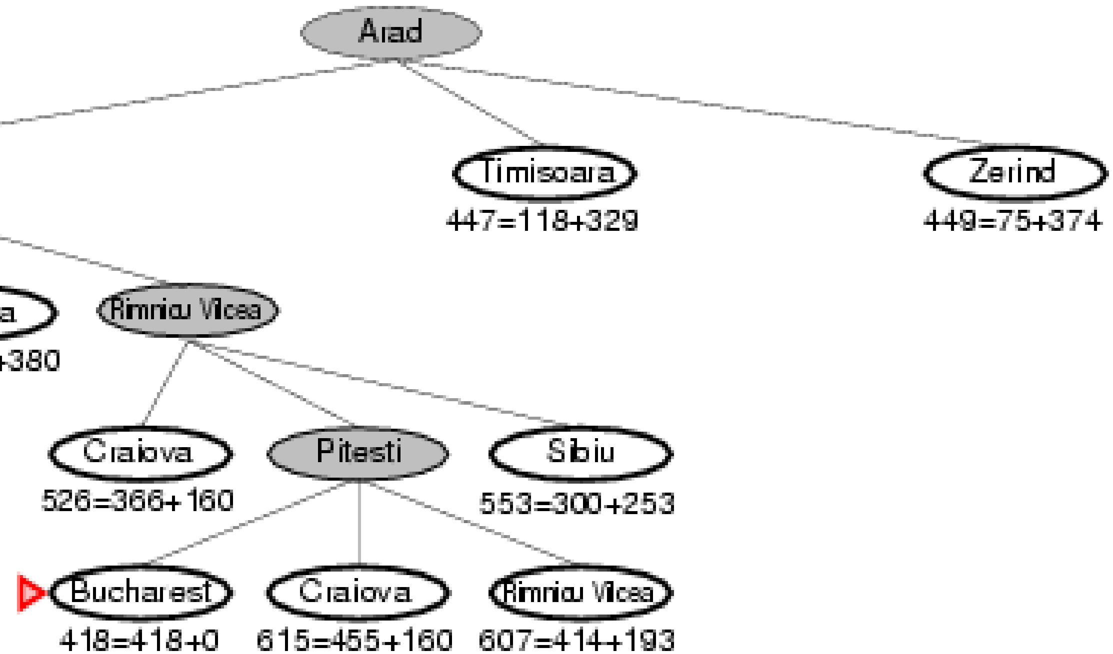
Exemplo de Procura A*



Exemplo de Procura A*



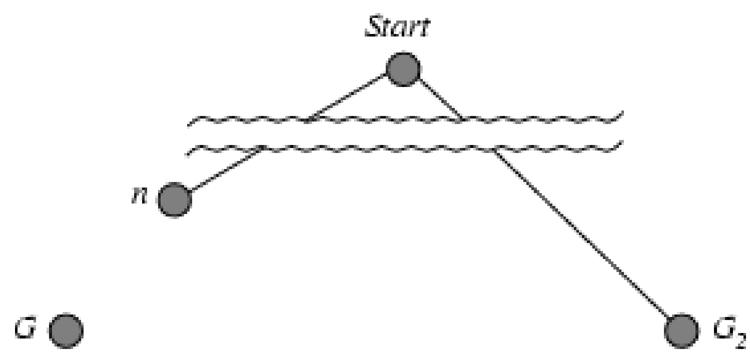
Exemplo de Procura A*



Heurísticas admissíveis

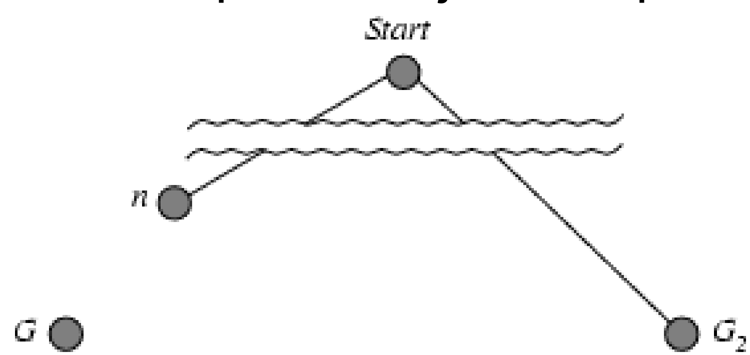
- Uma heurística $h(n)$ é admissível se para todo o nó n, $h(n) \leq h^*(n)$, em que $h^*(n)$ é o custo real de atingir o objectivo a partir de n.
- Uma heurística admissível nunca sobrestima o custo de alcançar o objectivo, i.e., é optimista.
- Exemplo: $h_{SLD}(n)$ (nunca sobrestima a distância por estrada)
- Teorema: Se $h(n)$ é admissível, então o algoritmo A^* usando `TREE-SEARCH` é óptimo.

Optimalidade de A* (demonstração)

- Suponha-se que um estado final subóptimo G_2 foi gerado e encontra-se na fronteira. Seja n um nó por expandir na fronteira num caminho mais curto para o objectivo óptimo G.
- 

- $f(G_2) = g(G_2)$ pois $h(G_2) = 0$
- $g(G_2) > g(G)$ porque G_2 é subóptimo
- $f(G) = g(G)$ pois $h(G) = 0$
- Logo $f(G) < f(G_2)$

Optimalidade de A* (redução ao absurdo)

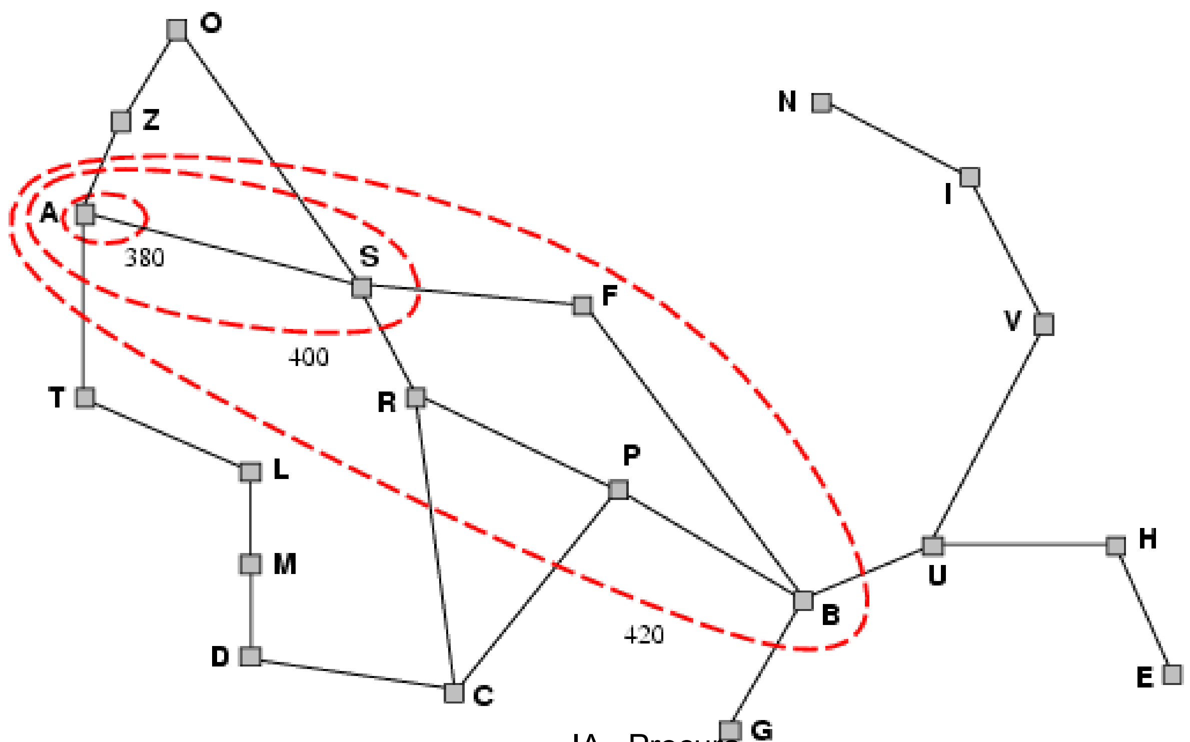
- Suponha-se que um estado final subóptimo G_2 foi gerado e encontra-se na fronteira. Seja *n* um nó por expandir na fronteira num caminho mais curto para o objectivo óptimo *G*.
- 

- $f(G_2) > f(G)$ como se viu anteriormente
- $h(n) \leq h^*(n)$ porque h é admissível
- $g(n) + h(n) \leq g(n) + h^*(n)$
- $f(n) \leq f(G)$
-

Portanto $f(G_2) > f(n)$, e o A* nunca selecionará G_2 para expansão

Optimalidade de A* (mais útil)

- A* expande nós por ordem crescente de valores da função de avaliação
- Adiciona gradualmente contornos aos nós (c.f. procura em largura adiciona níveis)
- Contorno *i* tem todos os nós $f=f_i$, em que $f_i < f_{i+1}$
-



Propriedades do A*

- O A* expande todos os nós com $f(n) < C^*$
- O A* expande alguns nós com $f(n) = C^*$
- O A* nunca expande nós com $f(n) > C^*$

O algoritmo A* é optimalmente eficiente para qualquer heurística dada:

- Não há outro algoritmo **óptimo** que garantidamente expanda um menor número de nós!

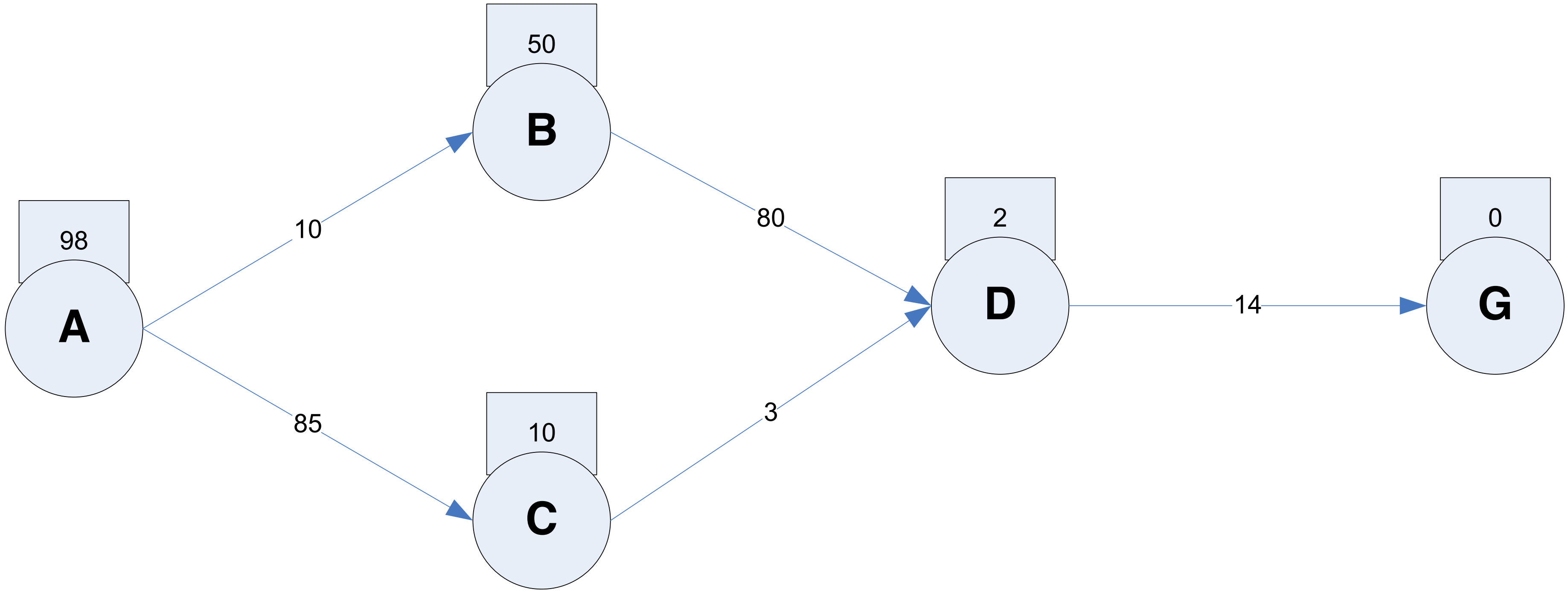
Propriedades do A*

- Completo? Sim (a não ser que haja um número infinito de nós com f ≤ *f(G)*)
-
- Tempo? Exponencial no [erro relativo de *h* x o tamanho da solução]

  Se $|h(n) - h^*(n)| \leq O(\log h^*(n))$ o algoritmo A* tem um comportamento subexponencial.

- Espaço? Mantém todos os nós em memória
-
- Óptimo? Sim, se a heurística for admissível
-

Problemas da versão naïve do A* com procura em grafos



fronteira

A(98)	B(60) C(95)	D(92) C(95)	C(95) G(104)	D(90) G(104)	G(104)
	A	A B	A B D	A B C D	A B C D

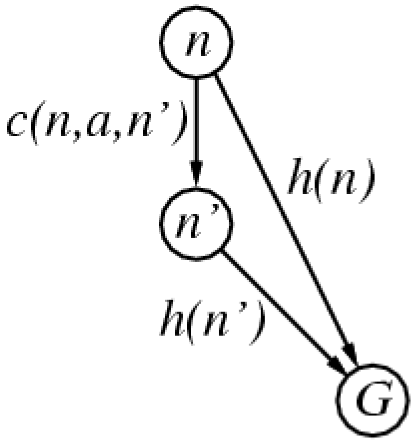
explorados

Heurísticas consistentes

A demonstração de optimalidade do A* não se generaliza para o algoritmo de procura em grafos (eliminação de estados já explorados)

- Uma heurística é consistente se para todo o nó *e* todo o seu sucessor *n’, gerado pela ação a*,
-

$$h(n) \le c(n,a,n') + h(n')$$



- Se *h* é consistente, temos
-

$$\begin{aligned} f(n') &= g(n') + h(n') \\ &= g(n) + c(n,a,n') + h(n') \\ &\ge g(n) + h(n) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

- ou seja, *f(n)* é não decrescente ao longo de qualquer caminho (é monótona).
-
- Teorema: Se *h(n)* for consistente, então o A* recorrendo à procura `GRAPH-SEARCH` é óptimo.
-

A* (versão optimizada em grafos)

```
function A*( problem ) returns a solution, or failure
  node ← a node with STATE=problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier ← a priority queue ordered by f-value with node as the only element
  explored ← a singleton set with node.STATE
  loop do
     if EMPTY?( frontier ) then return failure
     node ← POP( frontier ) /* chooses the node with lowest f-value in frontier */
     if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
     add node.STATE to explored
     for each action in problem.ACTIONS(node.STATE) do
            child ← CHILD-NODE( problem , node , action )
            if child.STATE is not in explored or frontier then do
               frontier ← INSERT(child , frontier )
            else if child.STATE is in frontier with higher f-value then
               replace that frontier node with child
```

Óptimo só para heurísticas consistentes!!!

O que fazer com heurísticas inconsistentes?

Solução simples: o conjunto de explorados mantém nós em vez de estados.

- Seja *n* um novo nó gerado pelo algoritmo. Se existir um nó *m* no conjunto de explorados para o mesmo estado de *n* tal que $f(n) < f(m)$ então retira-se o nó *m* do conjunto de explorados e coloca-se o novo nó *n* na fronteira.

- Com esta alteração, a utilização de heurísticas admissíveis garantem novamente a optimalidade da primeira solução encontrada pelo algoritmo de procura em grafos A*.

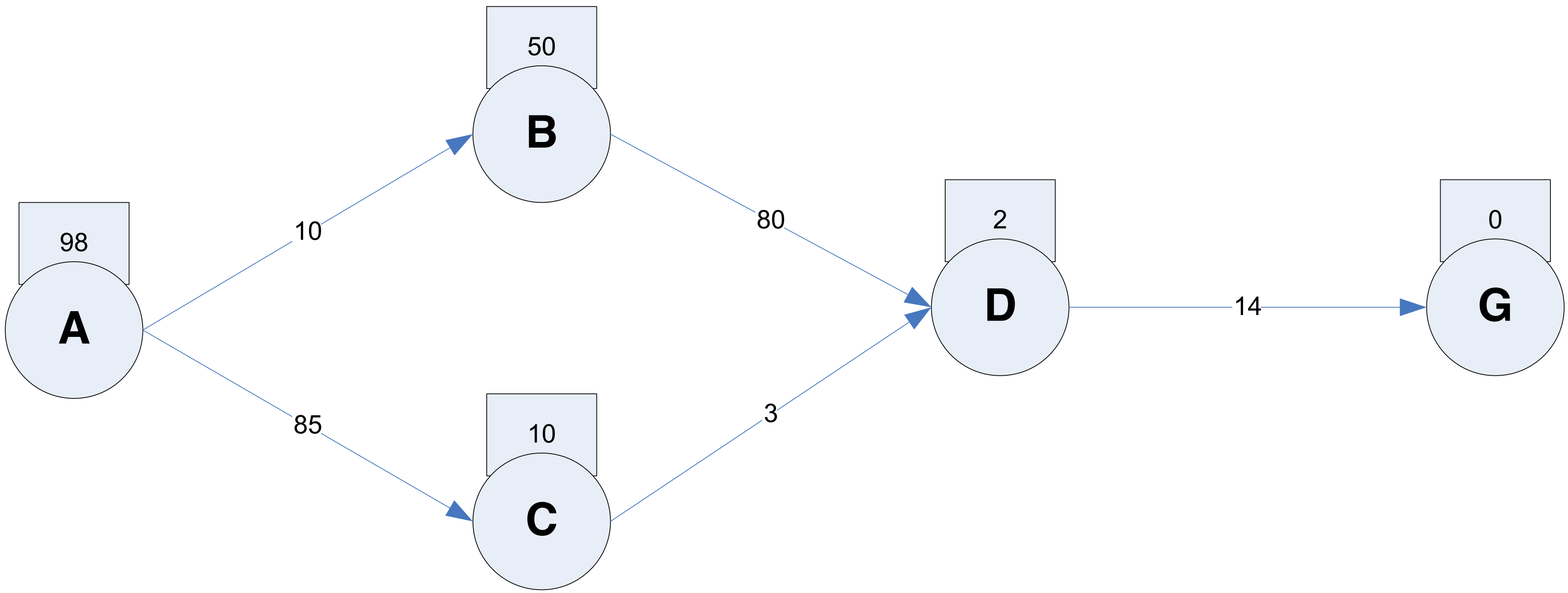
Procura A* em grafos corrigida

```
function GRAPH-SEARCH( problem, frontier ) returns a solution, or failure
    explored ← an empty set of nodes
    node ← node with STATE = problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
    frontier ← INSERT(node, frontier) /* priority queue ordered by f-value */
    loop do
            if EMPTY?(frontier) return failure
            node  ← POP( frontier ) /* chooses the node with lowest f-value in
frontier */

            if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
            if node.STATE is not in explored then
                  add node to explored
                  frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
            else if node.STATE = oldnode.STATE such that oldnode in explored
                  has higher f-value than node then
                  replace oldnode by node in explored
                  frontier ← INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
            endif
```

Garante óptimo para heurísticas admissíveis!!!

A* com procura em grafos (corrigido)



…	C(95) G(104)	D(90) G(104)	G(102) G(104)
…	A(98) B(60) D(92)	A(98) B(60) C(95) D(92)	A(98) B(60) C(95) D(90)

Estimativa PathMax

Existe uma optimização que tenta manter a heurística consistente (estimativa PathMax) mas mais complexa.

- A ideia consiste em utilizar como valor da função de avaliação

  $f\^(m) = \max \{f(n); f(m)\}$

- em que m é sucessor de n. O valor de $f\^(m)$ é obtido em tempo de execução e depende do caminho seguido para atingir m.
- Poderá ser necessário remover na mesma nós do conjunto de explorados.

Implementação dos algoritmos

Obviamente, deve-se ter algum cuidado na seleção das estruturas de dados para implementar a fronteira e o conjunto de estados explorados. Habitualmente o conjunto de estados explorados é implementado com uma tabela de dispersão (hash table). Quanto à fronteira, normalmente opta-se por:

- Fila de prioridade (priority queue) quando o grafo de estados é esparso: número reduzido de nós sucessores limitados por uma constante pequena. Complexidade temporal $O(N * \log_2 N + L * \log_2 N)$, em que N o número de estados e L o número de arcos. Esta é a situação habitual:
  - No pior caso têm de se retirar N nós da fila de prioridade, cada uma destas operações da ordem de $\log_2 N$
  - São necessárias no pior caso L inserções na fila de prioridade, cada uma com custo $\log_2 N$.

- Quando o grafo é denso, então deve-se utilizar uma lista ou tabela de dispersão. Complexidade temporal da ordem de $O(N^2 + L)$
  - Retirar o nó com menor custo é operação O(N), no máximo N vezes.
  - A inserção de um nó sucessor na fronteira pode ser feita com uma operação de O(1)

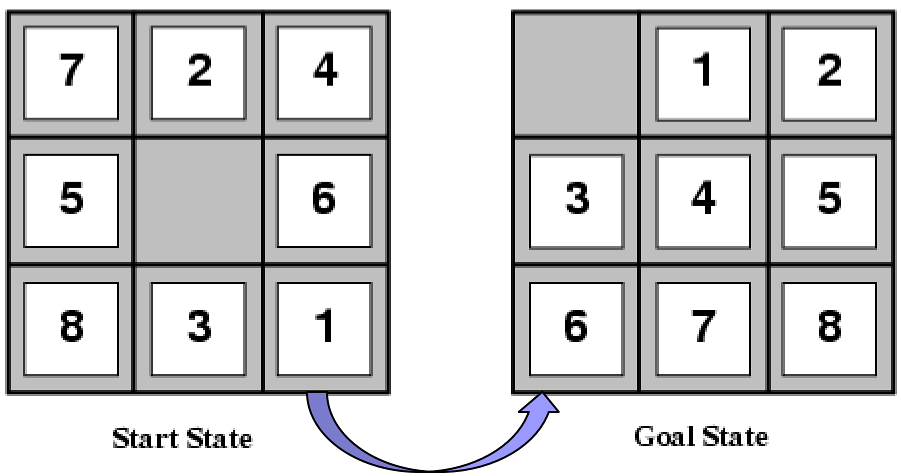
Comparação implementações

N	Densidade	L	N*log N + L * log N	N*N+L	Rácio
10	1%	1	**37**	101	0,36
10	10%	10	**66**	110	0,60
10	**50%**	50	199	**150**	1,33
10	**90%**	90	332	**190**	1,75
10	**100%**	100	365	**200**	1,83
100	1%	100	**1329**	10100	0,13
100	10%	1000	**7308**	11000	0,66
100	**50%**	5000	33884	**15000**	2,26
100	**90%**	9000	60459	**19000**	3,18
100	**100%**	10000	67103	**20000**	3,36
1000	1%	10000	**109624**	1010000	0,11
1000	10%	100000	**1006544**	1100000	0,92
1000	**50%**	500000	4992858	**1500000**	3,33
1000	**90%**	900000	8979172	**1900000**	4,73
1000	**100%**	1000000	9975750	**2000000**	4,99
10000	1%	1000000	**13420590**	101000000	0,13
10000	**10%**	10000000	133010001	**110000000**	1,21
10000	**50%**	50000000	664518496	**150000000**	4,43
10000	**90%**	90000000	1196026991	**190000000**	6,29
10000	**100%**	100000000	1328904115	**200000000**	6,64
100000	1%	100000000	**1662625011**	10100000000	0,16
100000	**10%**	1000000000	16611301438	**11000000000**	1,51
100000	**50%**	5000000000	83049863336	**15000000000**	5,54
100000	**90%**	9000000000	149488425234	**19000000000**	7,87
100000	**100%**	10000000000	166098065708	**20000000000**	8,30

Heurísticas admissíveis

Para a charada-8 uma procura exaustiva explora em média $3{,}1\text{x}10^{10}$ nós. Mas existem apenas 181440 estados (charada-15 são 10^{13}) .

É fundamental a utilização de heurísticas



26 passos

- $h_1(n)$ = número de peças colocadas erradamente
  - $h_1(S)$ = 8
- $h_2(n)$ = soma das distâncias de Manhattan
  - $h_2(S)$ = 3+1+2+2+3+2+2+3=18
  -

Dominância

- Se $h_2(n) \geq h_1(n)$ para todo o n (ambas admissíveis) então h_2 domina h_1 , sendo h_2 melhor na procura

- Custos típicos de procura para charada-8 (número médio de nós expandidos):
-
  - *d=12*
    AP = 3,644,035 nós (b* = 2,78)
    $A^*(h_1)$ = 227 nós (b* = 1,42)
    $A^*(h_2)$ = 73 nós (b* = 1,24)
  - *d=24*
    AP ≈ 54.000.000.000 nós
    $A^*(h_1)$ = 39,135 nós (b* = 1,48)
    $A^*(h_2)$ = 1,641 nós (b* = 1,26)

- Caso $h_2(n)$ *não domine* $h_1(n)$*, e vice-versa, pode-se sempre combinar as heurísticas com a expressão max* $\{h_1(n), h_2(n)\}$

- *O factor de ramificação efetivo b* caracteriza a qualidade da heurística utilizada. O valor b* é obtido resolvendo a equação* $N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \ldots + (b^*)^d$*, em que N é o número de nós gerados pelo A* e* d *a profundidade da solução obtida.*

Problemas relaxados

- Um problema com menos restrições nas acções é designado por problema relaxado.

- O custo exato de uma solução óptima para o problema relaxado é uma heurística admissível para o problema original!

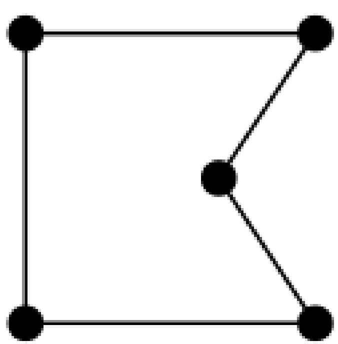
Considere-se a charada-*n* novamente

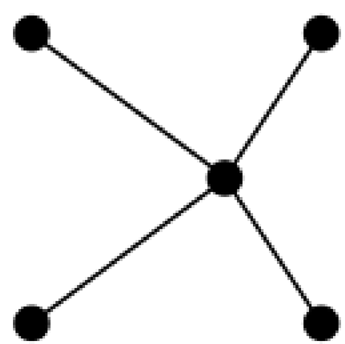
- Se as regras da charada-*n* forem relaxadas de maneira a que uma peça se possa movimentar para *qualquer* posição, então $h_1(n)$ dá-nos a melhor solução.

- Se as regras da charada-*n* forem relaxadas de maneira a que uma peça se possa movimentar para *qualquer* posição adjacente, então $h_2(n)$ dá-nos a melhor solução.

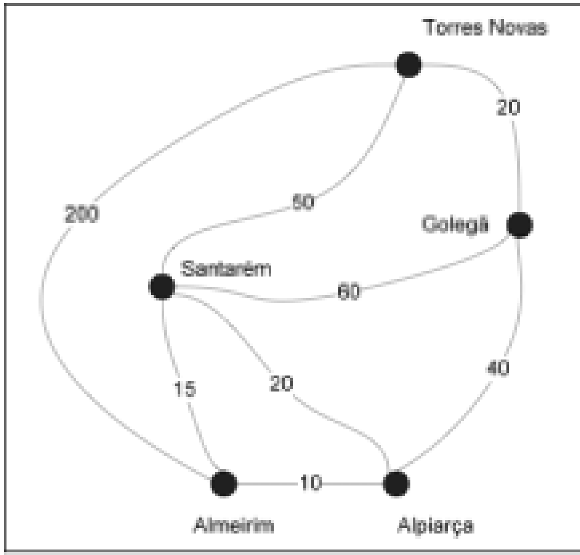
Problema do caixeiro viajante

- Encontrar o circuito mais curto que visita todas as cidades exatamente uma vez.
- Árvore de cobertura mínima pode ser obtida em $O(n^2)$ e é um limite inferior ao menor circuito (aberto)





Caixeiro viajante dependente do tempo



Almeirim:

Hora	Tempo
[08-10[	40
[10-17[	25
[17-19[	30

Alpiarça:

Hora	Tempo
[08-10[	20
[10-19[	15

Golegã:

Hora	Tempo
[08-19[	15

Santarém:

Hora	Tempo
[08-11[	70
[11-13[	60
[13-15[	45
[15-18[	70
[18-19[	55

Torres Novas:

Hora	Tempo
[08-10[	60
[10-15[	50
[15-19[	55

Pretende-se partir de uma cidade, entregando produtos em cada uma das cidades, voltando ao início. O tempo de entrega nas cidades depende da hora de chegada. A viatura parte às 8 horas da manhã.

- Heurística admissível ?

Procura informada com memória limitada

- Procura informada com memória limitada
  - Algoritmo IDA*
  - Algoritmo recursivo de procura pelo melhor primeiro (RBFS)
  - Algoritmo A* de memória limitada simplificado

A* por aprofundamento progressivo

```
function IDA*(problem) returns a solution sequence
  inputs: problem, a problem
  local variables: f-limit, the current f- COST limit
                   root, a node

  root ← MAKE-NODE(INITIAL-STATE[problem])
  f-limit ← f- COST[root]
  loop do
      solution, f-limit ← DFS-CONTOUR(root, f-limit)
      if solution is non-null then return solution
      if f-limit = ∞ then return failure; end
```

A* por aprofundamento progressivo

function DFS-CONTOUR(*node*, *f-limit*) **returns** a solution sequence and a new f- COST limit
  inputs: *node*, a node
    f-limit, the current f- COST limit
  local variables: *next-f*, the f- COST limit for the next contour, initially ∞

  if f- COST[*node*] > *f-limit* **then return** null, f- COST[*node*]
  if GOAL-TEST[*problem*](STATE[*node*]) **then return** *node*, *f-limit*
  for each node *s* **in** SUCCESSORS(*node*) **do**
    solution, *new-f* ← DFS-CONTOUR(*s*, *f-limit*)
    if *solution* is non-null **then return** *solution*, *f-limit*
    next-f ← MIN(*next-f*, *new-f*); **end**
  return null, *next-f*

Propriedades do IDA*

- Completo
- Espaço linear
- Óptimo
- Prático se os custos do passos forem unitários
- Dificuldade em lidar com custos reais, podendo acarretar grande tempo de processamento motivado por regenerações sucessivas de nós

A análise de sobrecarga efectuada para as versões cegas não é válida aqui!

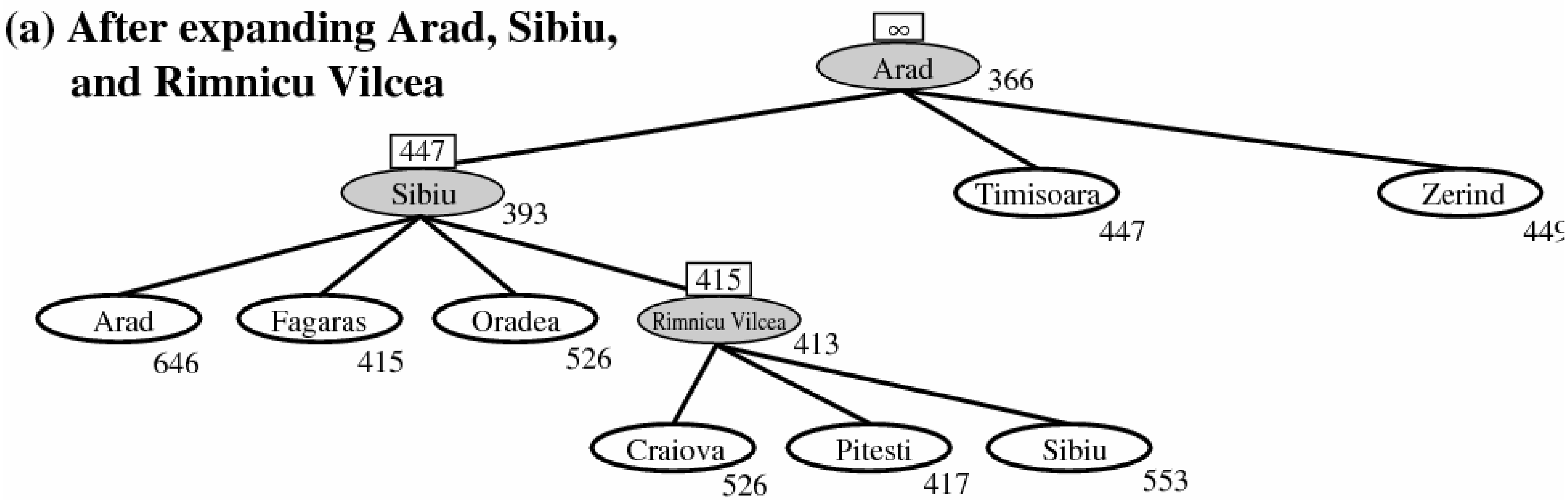
function RECURSIVE-BEST-FIRST-SEARCH(*problem*) **returns** a solution, or failure
RBFS(*problem*,MAKE-NODE(INITIAL-STATE[*problem*]),∞)

---

function RBFS(*problem*,*node*,*f-limit*) **returns** a solution, or failure and a new f-cost limit

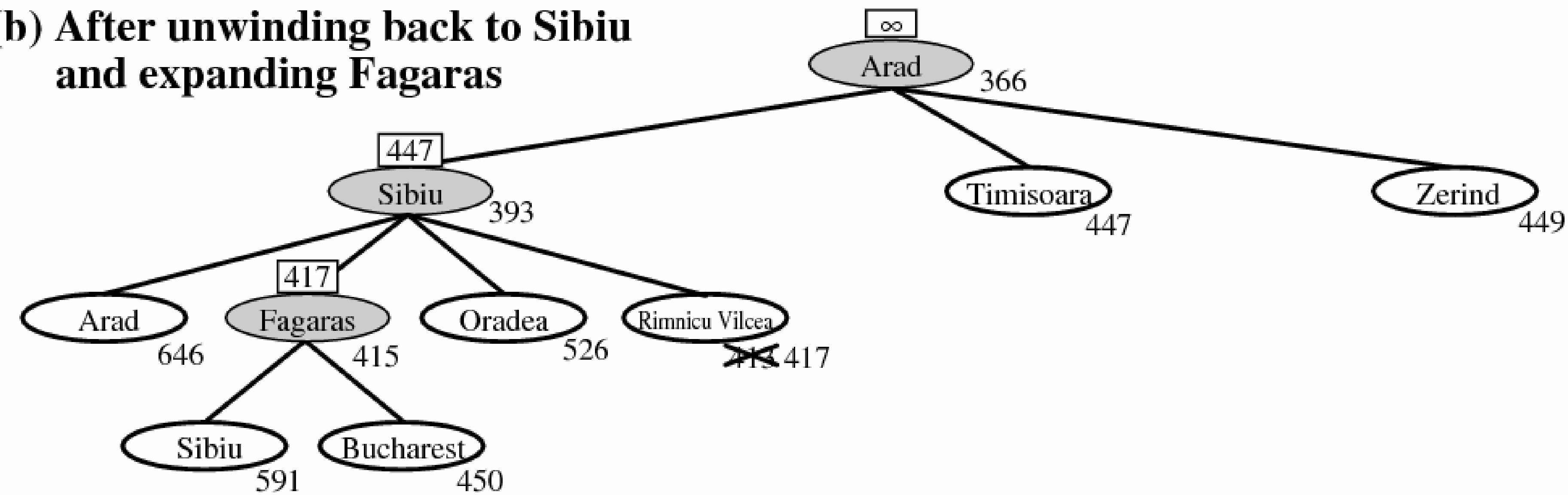
if GOAL-TEST[*problem*](STATE[*node*]) **then return** *node*
successors ← EXPAND(*node*,*problem*)
if *successors* is empty **then return** *failure*,∞
for each *s* **in** *successors* **do**
    f[*s*] ← MAX(g(*s*)+h(*s*), f[*node*])
repeat
    best ← the lowest f-value node in *successors*
    if f[*best*] > *f-limit* **then return** failure, f[*best*]
    alternative ← the second lowest f-value node among *successors*
    result, *f*[*best*] ← RBFS(*problem*, *best*, min(*f-limit*,alternative))
    if *result*≠*failure* **then return** *result*

Exemplo RBFS (1)

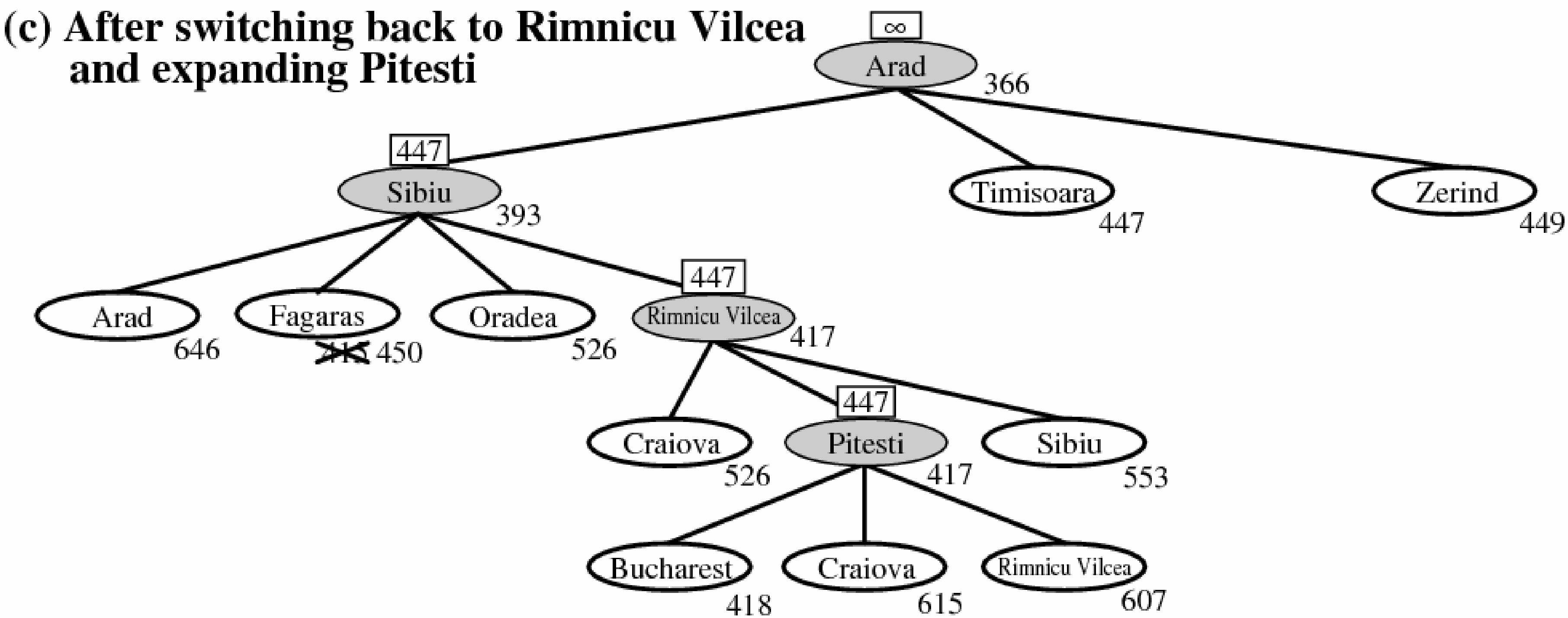


Exemplo RBFS (2)

(b) After unwinding back to Sibiu and expanding Fagaras



Exemplo RBFS (3)



Propriedades do RBFS

- Completo
- Espaço linear
- Óptimo (se a heurística for admissível)
- Melhor que o IDA*
- Continua a ter problemas com regenerações sucessivas de nós: utiliza pouca memória...

SMA*

- Tal como no A*, expande-se a melhor folha até ficar com a memória cheia
- Quando a memória fica toda ocupada, esquece a folha mais antiga com o pior valor, e guarda no pai o seu valor, para possível regeneração
- Um nó só é regenerado quando todos os outros caminhos se mostrarem piores do que aqueles do nó esquecido

```
function SMA*(problem) returns a solution sequence
 inputs: problem, a problem
 local variables: Queue, a queue of nodes ordered by f-cost

 Queue ← MAKE-QUEUE(MAKE-NODE(INITIAL-STATE[problem]))
 loop do
     if Queue is empty then return failure
     n ← deepest least-f-cost node in Queue
     if GOAL-TEST(n) then return success
     s ← NEXT-SUCCESSOR(n)
     if s is not a goal and is at maximum depth then f(s) ← ∞
     else f(s) ← MAX(f(n), g(s)+h(s))
     if all of n's successors have been generated then
         update n's f-cost and those of its ancestors if necessary
     if SUCCESSORS(n) all in memory then remove n from Queue
     if memory is full then
         delete shallowest, highest-f-cost node in Queue
         remove it from its parent's successor list
         insert its parent on Queue if necessary
     insert s on Queue
 end
```

Propriedades do SMA*

- O SMA* utiliza *toda* a memória disponível para levar a cabo a procura
- O SMA* é completo se existir uma solução alcançável (cujo caminho caiba em memória)
- Óptimo se existir uma solução óptima alcançável, caso contrário devolve a melhor solução cujo caminho cabe em memória
- Retira da fronteira nós superficiais com valores elevados da função de avaliação. Um nó retirado da fronteira só é regenerado se todos os irmãos forem piores do que ele.
- SMA* *é* o melhor algoritmo para procurar soluções óptimas, nomeadamente quando o espaço de estados é um grafo, os custos não são uniformes e a geração de nós é mais dispendiosa do que manter listas de nós abertos e fechados.
- Mas as limitações de memória podem tornar um problema intratável...

Outros cenários de procura

- Podem-se resolver problemas de procura “online” com ações deterministas em que se sabem as ações possíveis em cada estado, mas se desconhece o seu efeito antes das executar.
  - Algoritmo cego: Online-DFS (assume ações reversíveis)
  - Algoritmo informado: LRTA*

- Existem ainda outros algoritmos que permitem a alteração dos custos dos arcos em runtime (exemplo navegação robótica):
  - Dynamic A* (D*) e D* Lite

- Outros algoritmos são incrementais e permitem ir melhorando a solução obtida, caso o tempo o permita:
  - ARA * (Anytime repairing A*)
  - AD* (Anytime dynamic A*) = ARA* + D*

Bibliografia

- Capítulos 4.1 e 4.2 (4.5 versões online)
- Para verem as versões dinâmicas dos algoritmos consultar http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_4975.html